Exercício 13 (capítulo 6 do livro): Um centro emissor de cartões de segurança tem dois equipamentos de personalização, de funcionamento independente. O tempo de processamento, em segundos, para cada um deles tem comportamento normal com o mesmo tempo médio, sendo o desvio padrão do primeiro 10, e do segundo 15. Considerando amostras de 16 cartões personalizados de cada um dos equipamentos,

(a) Calcule a probabilidade de a diferença entre as duas amostras, em valor absoluto, superior a 5.

Solução: Seja X_i a variaável aleatória que representa o tempo de emissão de um cartão de segurança quando utilizado o equipamento i, com $i = 1, 2$. As variaáveis aleatórias são tais que

$$X_1 \sim N(\mu, \sigma = 10) \quad \text{and} \quad X_2 \sim N(\mu, \sigma = 15).$$

Seja $(X_{i,1}, X_{i,2}, \cdots, X_{i,16})$ uma amostra casual retirada da populao X_i, com $i = 1, 2$. Assim $X_{i,j}$ representa o tempo em segundos que o $j-$ésimo cartão demora a ser processado pelo equipamento i, com $j = 1, \cdots, 16$ e $i = 1, 2$. A probabilidade requerida é

$$P(|\overline{X}_1 - \overline{X}_2| > 5),$$

onde $\overline{X}_1$ e $\overline{X}_2$ representam as médias amostrais. Tendo em conta que $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ segue uma normal com média 0 e variancia dada por $\frac{10^2+15^2}{16} = \frac{325}{16}$, então

$$\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{325/16}} \sim N(0, 1)$$

e portanto temos que

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{325/16}}\right| > \frac{5}{\sqrt{325/16}}\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{325/16}}\right)\right) = 0.2673\,(\text{calculadora}).$$

Usando as tabelas, temos que $\frac{5}{\sqrt{325/16}} \approx 1.11$ logo $2\,(1 - \Phi\,(1.11)) = 0.267$.

(b) Qual a probabilidade do desvio padrão dos tempos de processamento dos cartões da mostra do primeiro equipamento ser superior ao do segundo equipamento?

Solução: Seja S_i^2 a variancia amostral associada á amostra $(X_{i,1}, X_{i,2}, \cdots, X_{i,16})$, com $i = 1, 2$. A probabilidade requerida é

$$P(S_1 > S_2) = P(S_1^2 > S_2^2)$$

Tendo em conta que

$$S_i^2 = \frac{16-1}{16} S_i'^2$$

onde $S_i'^2$ representa a variância corrigida da amostra casual i. Temos que

$$P(S_1^2 > S_2^2) = P\left(\frac{15}{16}S_1'^2 > \frac{15}{16}S_2'^2\right) = P\left(S_1'^2 > S_2'^2\right) = P\left(\frac{S_1'^2}{S_2'^2} > 1\right) = P\left(\frac{S_1'^2}{S_2'^2}\frac{15^2}{10^2} > \frac{15^2}{10^2}\right).$$

Uma vez que

$$\frac{S_1'^2}{S_2'^2}\frac{15}{10} \sim F(15, 15)$$

Podemos utilizar a calculadora para verificar que

$$P\left(\frac{S_1'^2}{S_2'^2}\frac{15^2}{10^2} > \frac{15^2}{10^2}\right) = 0.0637$$

Utilizando a tabela, podemos aproximar a probabilidade notando que

$$P\left(\frac{S_1'^2}{S_2'^2}\frac{15^2}{10^2} > \frac{15^2}{10^2}\right) = P\left(\frac{S_1'^2}{S_2'^2}\frac{15^2}{10^2} > 2.25\right) \approx 0.05.$$